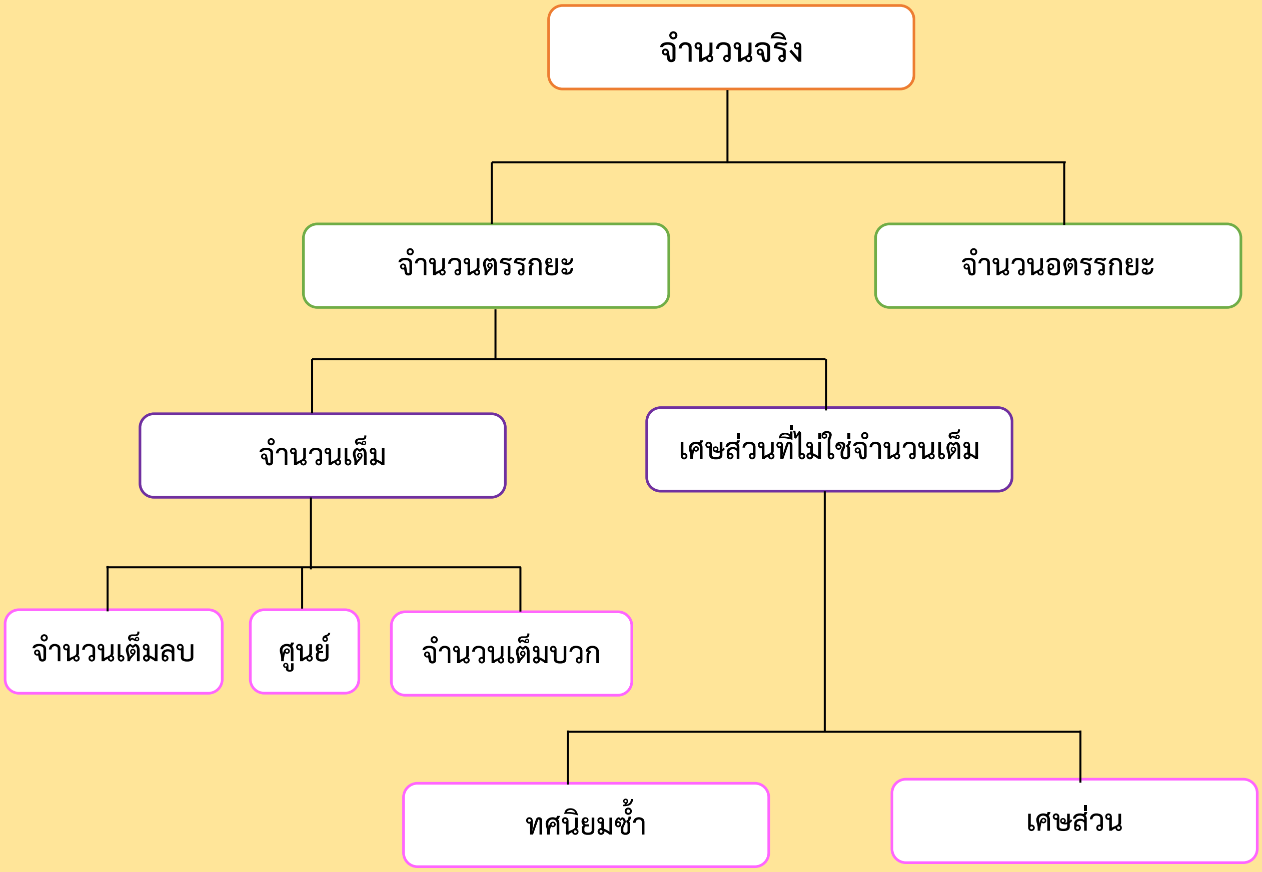
ใบความรู้ที่ 1.1 เรื่องความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับจำนวนเชิงซ้อน

คำชี้แจง : ให้นักเรียนศึกษาแผนผังของจำนวนจริง

แผนผังของจำนวนจริง



การใช้ความรู้เดิมเชื่อมโยงความรู้ใหม่ (Prior Knowledge)

พิจารณา สมการพหุนามบางสมการในระบบจำนวนจริง เช่น $x^2 + 1 = 0$ คำตอบของสมการพหุนาม $x^2 + 1 = 0$ จะได้ว่า

$$x^2 + 1 = 0$$

$$x^2 = -1$$

$$x = \pm\sqrt{-1}$$ ซึ่งไม่ใช่จำนวนจริง

จะเห็นได้ชัดว่าไม่มีจำนวนจริง x ใดๆ ที่ทำให้สมการเป็นจริง จึงกล่าวได้ว่า สมการพหุนาม $x^2 + 1 = 0$ ไม่มีคำตอบของสมการที่เป็นจำนวนจริง เพื่อให้สมการพหุนามนี้มีคำตอบ จึงมีการสร้างระบบจำนวนเชิงซ้อนขึ้นเพื่อให้สมการพหุนามทั้งหมดมีคำตอบทั้งที่เป็นจำนวนจริงและไม่ใช่จำนวนจริง

เนื้อหา

1. กำหนดให้ $\sqrt{-1}$ แทนด้วยสัญลักษณ์ i (มาจาก imaginan) จำนวน
2. พิจารณาว่า จำนวนจินตภาพอื่นๆ เช่น $\sqrt{-2}$, $\sqrt{-3}$, $\sqrt{-4}$ เป็นต้น จะเขียนในรูป ci ได้ อย่างไร

ตัวอย่าง

$$\sqrt{-2} = \sqrt{2} \times \sqrt{-1} = \sqrt{2}i$$

$$\sqrt{-3} = \sqrt{3} \times \sqrt{-1} = \sqrt{3}i$$

$$\sqrt{-4} = \sqrt{4} \times \sqrt{-1} = \sqrt{4}i = 2i)$$

ดังนั้นจำนวนในวิชาคณิตศาสตร์จึงสามารถมีได้ทั้งจำนวนจริงและจำนวนที่ไม่ใช่จำนวนจริงหรือจำนวน จินตภาพ (imaginary number) รวมจำนวนทั้งสองชนิด เรียกว่า “จำนวนเชิงซ้อน” นิยมเขียนอยู่ในรูป

$z = a + bi$ หรือ (a,b)เมื่อ a และ b เป็นจำนวนจริงใดๆ และ $i = \sqrt{-1}$

เรียก a ว่า ส่วนจริง (real part) ของ z และเขียนแทนด้วย Re(z)

เรียก b ว่า ส่วนจินตภาพ (imaginary part) ของ z และเขียนแทนด้วย Im(z)

ส่วนจริง ส่วนจินตภาพและจำนวนจินตภาพของแต่ละจำนวน

จำนวน	**ส่วนจริง**	**ส่วนจินตภาพ**	**จำนวนจินตภาพ**
1 + i	1	1	i
-4i	0	-4	-4i
-3 – 2i	-3	-2	-2i
5.5	5.5	0	0

4. จากตัวอย่างจำนวนในข้อ 3 จะเห็นว่าจำนวนที่มีแต่จำนวนจินตภาพเพียง อย่างเดียว เช่น –4i เราเรียกว่า "จำนวนจินตภาพแท้"

5. พิจารณาหาค่าของ i ยกกำลัง n ดังนี้

จากนิยาม $i^0 = 1$

และ $i = i$

$$i^2 = \left(\sqrt{-1}\right)^2 = -1$$

$$i^3 = i^2 \cdot i = (-1) \cdot i = -i$$

$$i^4 = i^2 \cdot i^2 = (-1)(-1) = 1$$

$$i^5 = i^4 \cdot i = i$$

$$i^6 = i^4 \cdot i^2 = -1$$

$$i^7 = i^4 \cdot i^3 = -i$$

$$i^8 = i^4 \cdot i^4 = 1$$

จะเห็นว่าค่าของ i^n มีความสัมพันธ์ระหว่างผลหารและเศษของการหาร n ด้วย 4 จึงสรุปค่าของ i^n ดังนี้

$i^n = 1$ เมื่อ n ÷ 4 แล้วเหลือเศษ 0 (หารลงตัว)

$i^n = i$ เมื่อ n ÷ 4 แล้วเหลือเศษ 1

$i^n = -1$ เมื่อ n ÷ 4 แล้วเหลือเศษ 2

$i^n = -i$ เมื่อ n ÷ 4 แล้วเหลือเศษ 3

6. พิจารณาการหาผลบวกของ i ยกกำลัง n เมื่อ n แทนจำนวนนับใด ๆ เช่น ผลบวกของ

$$i+i^2+i^3+i^4 = i+(-1)+(-i)+1=0$$

$$i^2+i^3+i^4+i^5 = (-1)+(-i)+1+i=0$$

จะพบว่า ความสัมพันธ์ของผลบวกของ i ยกกำลัง n ที่เรียงลำดับ จะพบว่า “ผลบวก ของ i^n 4 จำนวนที่เรียงลำดับต่อกันจะรวมกันได้เท่ากับ 0 เสมอ”

7. พิจารณาการหาผลคูณของ i ยกกำลัง n เมื่อ n แทนจำนวนนับใด ๆ เช่น ผลคูณของ

$$i\cdot i^2\cdot i^3\cdot i^4 = (i)(-1)(-i)(1)=-1$$

$$i^3\cdot i^4\cdot i^5\cdot i^6 = (-i)(1)(i)(-1)=-1$$

จะพบว่า “ผลคูณของ i^n 4 จำนวนที่เรียงลำดับต่อกันจะมีผลคูณเท่ากับ -1 เสมอ”